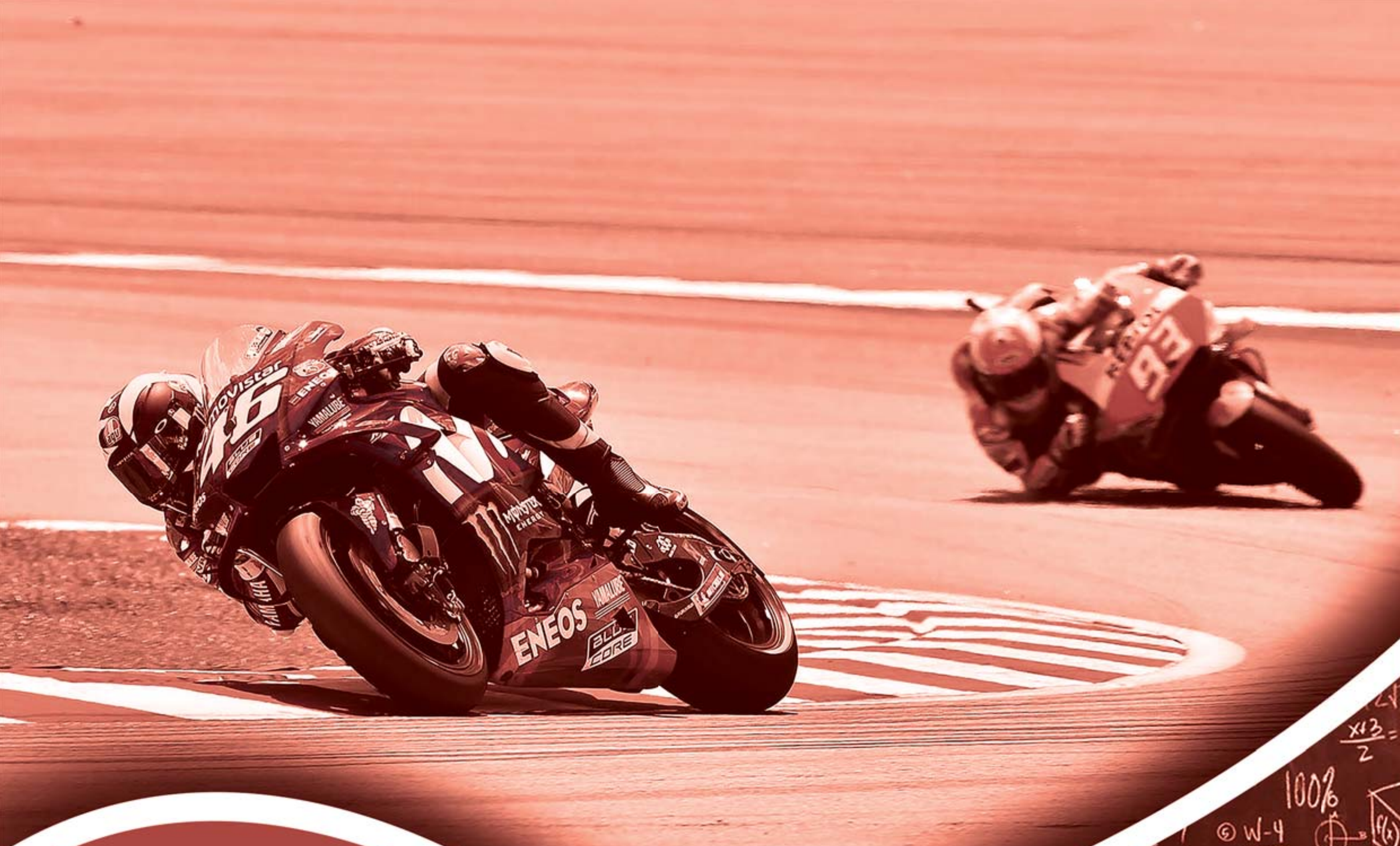
MODUL
TEMA 11

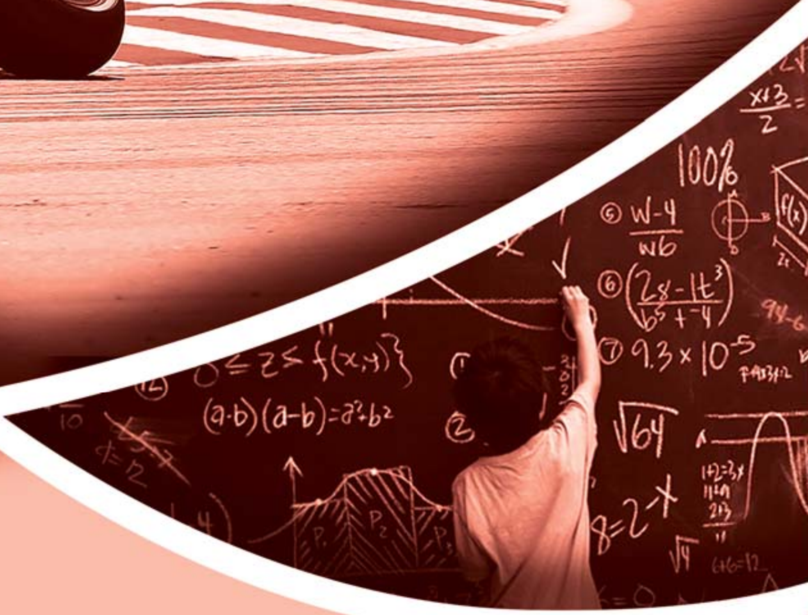
Mendekati tapi Tak Sampai

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020



MODUL
TEMA 11



Mendekati tapi Tak Sampai

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

TUT WURI HANDAYANI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020

Matematika Peminatan Paket C Setara SMA/MA Kelas XII
Modul Tema 11 : Mendekati Tapi Tak Sampai

- **Penulis:** Hendra Lesmana M.Pd.; Uswatun Hasanah,S.Pd.; Drs. G. Kundaru.
- **Editor:** Dr. Samto; Dr. Subi Sudarto
  Dra. Maria Listiyanti; Dra. Suci Paresti, M.Pd.;Apriyanti Wulandari, M.Pd.

- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus–Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah–Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

iv+ 44 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, 1 Juli 2020
Plt. Direktur Jenderal

Hamid Muhammad

Daftar Isi

MENDEKATI TAPI TAK SAMPAI

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini berisi materi tentang limit fungsi alajabar dan fungsi trigonometri dan penerapannya dalam masalah kontekstual sehari-hari maupun di dunia usaha dan industry. Sebelum mempelajari modul ini, Anda sudah harus menguasai materi prasyarat yaitu tentang fungsi aljabar, perbandingan dan fungsi trigonometri, dan operasi matematika yang melibatkan fungsi. Untuk memastikan tingkat penguasaan, peserta didik dapat mengerjakan latihan yang dikenalkan diawal modul.

Untuk dapat memahami isi modul ini secara maksimal, Anda harus mengikuti petunjuk penggunaan modul, yaitu:

1. Perhatikan istilah-istilah yang digunakan dalam modul seperti:

Petunjuk Penggunaan Modul
Bagian ini berisi langkah-langkah yang harus dilakukan untuk memahami modul
Tujuan Pembelajaran
Bagian ini berisi kemampuan-kemampuan yang dikuasai setelah mempelajari modul
Pengantar
Bagian ini berisi gambaran uraian materi yang dibahas di dalam modul
Penugasan
Bagian ini berisi kegiatan yang dilakukan oleh peserta didik dalam memahami konsep materi di dalam modul

Latihan Unit
Bagian ini berisi soal-soal yang dikerjakan oleh peserta didik sebagai penguatan dalam meningkatkan kemampuan peserta didik
Rangkuman
Bagian ini berisi ringkasan materi modul secara keseluruhan. Beberapa rumus, persamaan, dan konsep-konsep yang penting disajikan dalam rangkuman sebagai penguatan bagi peserta didik
Latihan Akhir
Bagian ini berbeda dengan latihan pada unit-unit. Bagian ini adalah latihan secara menyeluruh yang terdiri dari seluruh unit dalam modul ini.
Kunci Jawaban
Bagian ini berisi deskripsi jawaban latihan dan atau kriteria dari suatu penugasan. Bagian ini dibuka setelah peserta didik menyelesaikan latihan dan atau penugasan yang dikerjakan setelah mempelajari modul ini.
Saran Referensi
Bagian ini berisi sumber-sumber lain yang dapat digunakan sebagai tambahan bahan pembelajaran yang direkomendasikan untuk dicari. Bagian ini lebih menekankan tambahan pengetahuan bagi peserta didik.
Daftar Pustaka
Bagian ini berisi sumber-sumber bahan bacaan penyusun modul.

2. Anda dianggap tuntas dalam mempelajari modul ini dan boleh pindah ke modul berikutnya apabila peserta didik mencapai nilai 75 yang dihitung dari perpaduan soal penugasan dan latihan baik latihan pada tiap-tiap unit maupun latihan pada akhir modul. Untuk menghitung perolehan nilai peserta didik menggunakan rumus berikut:

   $$NA = 30\%\ NRP + 30\%\ NRLU + 40\%\ NLA$$

   Keterangan:
   NA = Nilai akhir
   NRP = Nilai rata-rata penugasan tiap-tiap unit
   NRLU = Nilai rata-rata latihan pada tiap-tiap unit
   NLA = Nilai latihan akhir modul

   Jika nilai Anda masih di bawah 70, maka dianjurkan untuk mempelajari kembali terutama bagian yang belum dikuasai.
3. Modul ini disusun sedemikian rupa dengan tujuan Anda dapat secara mandiri mempelajari materi modul ini. Namun, apabila masih terdapat kendala dapat dikonsultasikan kepada tutor. Selain itu, Anda juga diberikan penugasan-penugasan yang dikerjakan dalam kelompok-kelompok.
4. Anda juga dapat mencari sumber bacaan lain yang relevan dengan materi pada pada modul sebagai sumber belajar tambahan.

Catatan:

1. Jangan tergoda untuk melihat kunci jawaban sebelum menyelesaikan soal latihan baik di tiap unit maupun di akhir modul.
2. Jangan tergoda untuk melihat bagian rangkuman tanpa mempelajari uraian materi.

Tujuan Yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Kompetensi matematika yang perlu dicapai peserta didik setelah mempelajari modul ini adalah mampu menjelaskan dan menentukan limit fungsi aljabar dan fungsi trigonometri serta menerapkannya untuk menyelesaikan masalah kontekstual. Secara rinci, setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta didik mampu untuk:

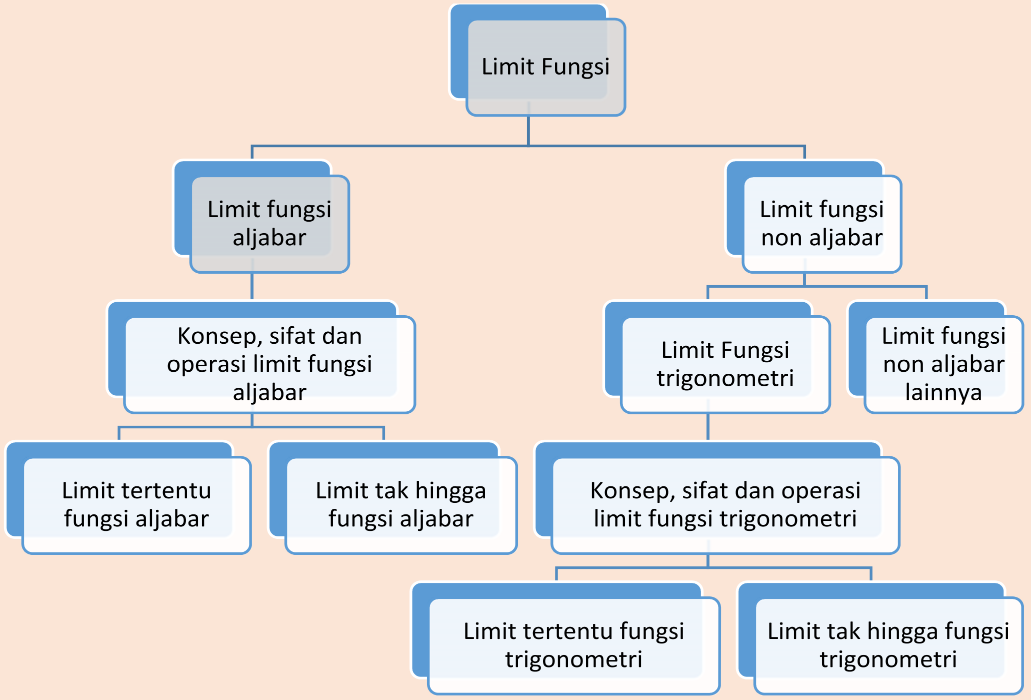
1. Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri
2. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri
3. Menjelaskan dan menentukan limit tak hingga dari fungsi aljabar dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya
4. Menyelesaikan masalah kontekstual berkaitan dengan limit tak hingga fungsi aljabar dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya
5. Menjelaskan dan menentukan limit tak hingga dari fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya
6. Menyelesaikan masalah kontekstual berkaitan dengan limit tak hingga fungsi trigonometri dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya

Pengantar Modul

Anda pasti pernah mendengar kalimat "kasih tak sampai". Iya benar sekali. Pasti judul modul ini juga tidak terasa asing di telinga Anda. "**Mendekati tapi tak sampai**". Namun kita kadang hanya dapat membayangkan bagaimana kondisi tersebut tanpa mau berpikir lebih jauh dan memahami kondisi tersebut yang sangat erat hubungannya dengan materi **limit**. Kita sering mengatakan "uangku di dompet limit" atau "si A duitnya tidak akan habis tujuh turunan". Ya sangat jelas sekali bahwa semua itu berhubungan dengan **limit**, yaitu mendekati nilai tertentu

Anda mungkin juga pernah mendengar alat elektrokardiogram (EKG) yang digunakan untuk mengukur aktifitas listrik jantung yang digunakan dokter dan ditampilkan dalam bentuk grafik di layar monitor untuk memeriksa pasien yang memiliki gejala sakit jantung. Penggambaran nilai arus listrik dilakukan secara pendekatan dalam bentuk grafik dengan memanfaatkan konsep **limit**. Oleh karena itu, pembelajaran limit sangatlah penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari.

Modul ini terdiri dari 2 unit yaitu unit 1.1 yang berjudul Kejarlah Aku, dan unit 1.2 yang berjudul Banyak Tak Terhingga. Semua judul unit tersebut sangat melekat di kehidupan sehari-hari. Modul ini disajikan dengan konteks yang sangat dekat dengan kehidupan sehari-hari Anda. Modul ini dilengkapi penugasan dan latihan untuk dapat menguji kemampuan Anda dalam mempelajari modul ini. Selamat Belajar!



UNIT 11.1 KEJARLAH AKU

Sumber: https://cnnindonesia.com/olahraga/20171023143442-156-250333/reaksi-lucu-valentino-rossi-dengar-alasan marques/

Gambar 11. 1 Marc Marques Mengejar Valentino Rossi

Terbayangkah Anda bagaimana dalam suatu balap motor seorang pembalap mencoba menyalip dengan berbagai strategi namun hanya mampu mendekati dari belakang saja. Kejadian ini adalah proses yang kita sebut sebuah objek mendekati objek lain sedekat mungkin. Dalam matematika proses semacam ini disebut dengan limit, misalnya untuk variable x menuju nilai tertentu sedekat mungkin, atau dikatakan nilai x menuju nilai tertentu atau limit x mendekati nilai tertentu.

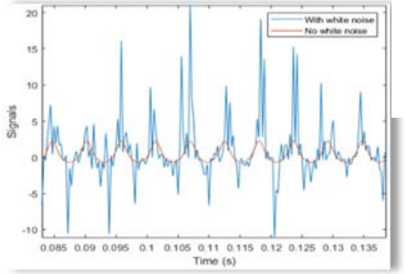
A. Sedikit Lagi

Sumber: http//rodabalap.com/balap-motor/balap-motor-masuk-kelas-yang-dilombakan-di-pon-2020-papua/

Gambar 11. 2 Pembalap Bermotor Kuning Mencoba Membalap Pembalap Bermotor Biru

Apabila kita mengejar sesuatu sedangkan kecepatan kita dan kecepatan yang kita kejar adalah sama, maka tentu kita tidak akan dapat mengejarnya. Anggap saja kecepatan dari yang kita kejar adalah batasnya, kita harus dapat melebihi batas itu untuk dapat mengejarnya. Apabila kita tidak dapat melebihi batas tersebut dan kita hanya terus berada dekat dengan batas tersebut, maka hal yang demikian ini kita sedang berada di posisi mendekati limit atau batas.

Sekarap perhatikan alat **Elektrokardiograf** (EKG) yang digunakan untuk detak jantung di mana hasilnya pengukuran dinyatakan pada grafik berikut



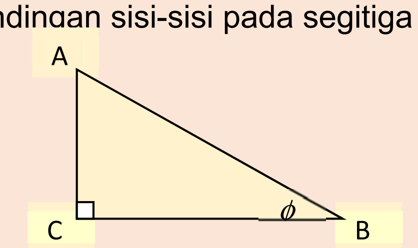
Gambar 11.3 Sinyal dan Gambar EKG

Sumber: http://blog-guru-tik.blogspot.com/2013/03/2-pengembangan-teknologi-jantung.html

Apabila pada grafik seluruh titik berada pada angka 0 maka menunjukkan tidak adanya aktivitas jantung sehingga diindikasikan orang tersebut telah meninggal. Nah apabila belum sampai ke titik 0 dan hanya berada tidak jauh dari angka 0 maka keadaan tersebut dapat disebut limit. Secara sederhana, kita dapat mengatakan bahwa limit itu **mendekati** suatu batas tapi **tidak sampai** atau tidak **melewati** batas tersebut. Batas yang dimaksud dapat kita berikan nilainya.

Mengingat Kembali

Perhatikan perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku berikut.



Besar sudut B adalah ϕ (dalam radian). Perbandingan sisi yang dihadapi sudut ϕ terhadap sisi miring disebut sinus (disingkat sin) dan perbandingan sisi dekat terhadap sisi miring disebut cosinus (disingkat cos). Jadi,

$$\sin \phi = \frac{sisi\ hadap}{sisi\ miring} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos \phi = \frac{sisi\ dekat}{sisi\ miring} = \frac{BC}{AB}$$

Perbandingan lainnya adalah tangen (disingkat tan), cosecan (disingkat csc), secan (disingkat sec), dan cotangen (disingkat cot), yang didefinisikan sebagai berikut.

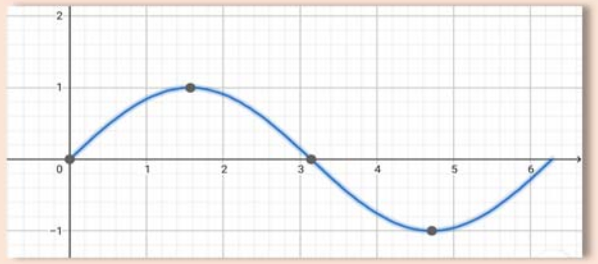
$$\tan \phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot \phi = \frac{1}{\tan\theta}$$

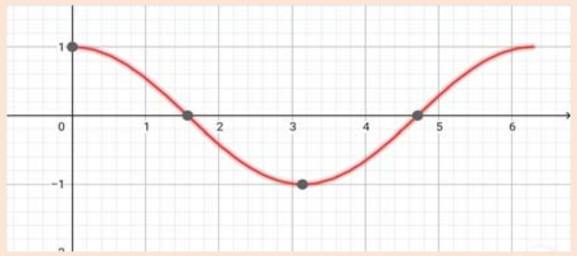
$$\sec \phi = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc \phi = \frac{1}{\sin\theta}$$

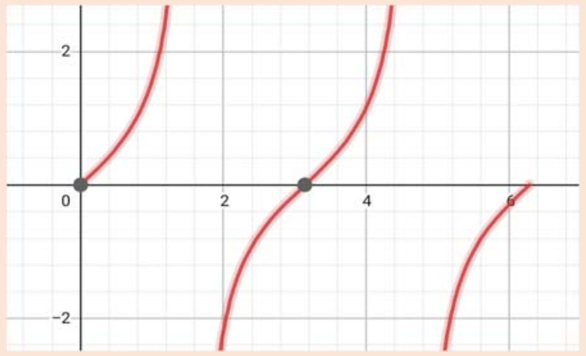
Jadi untuk fungsi trigonometri y = sin x, y = cos x, dan y = tan x, $0 \le x \le 2\pi$ dapat dilihat pada Gambar 1.3, Gambar 1.4, dan Gambar 1.5. Perhatikan satuan sudut yang digunakan adalah radian, di mana $2\pi = 360^0$



Gambar 11. 3 Grafik *y = sin x*



Gambar 11. 4 Grafik *y = cos x*



Gambar 11. 5 Grafik *y = tan x*

Bagaimana cara menggambar grafik tersebut? Baiklah, ***langkah pertama*** yang harus dilakukan untuk menggambar grafik fungsi *y = sin x*, *y = cos x, dan y = tan x* di mana x dalam radian, kecuali dinyatakan dalam satuan lain seperti dalam daftar nilai sinus, cosinus, dan tan dinyatakan dalam derajat seperti pada Tabel berikut. Kita dapat mengambil sudut istimewa saja agar lebih mudah.

Tabel 11. 1 Nilai Sinus Pada Sudut Istimewa yang dilalui fungsi y = sin x

X	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Langkah kedua yaitu menggambar titik-titik yang dilalui grafik $y = \sin x$ pada grafik. Titik-titik tersebut dihubungkan dengan kurva mulus. Semakin banyak titik-titik yang dihubungkan, semakin halus kurva yang dihasilkan. Nilai fungsi grafik $\sin x$ dan $\cos x$ berkisar di nilai antara -1 dan 1 dan berulang secara periodik pada selang yang berdampingan sepanjang 2π. Grafik $y = \sin x$ simetris terhadap titik asal, $y = \cos x$ simetris terhadap sumbu y. Grafik $y = \sin x$ akan membentuk atau berimpit dengan grafik $y = \cos x$ apabila digeser $\frac{\pi}{2}$ satuan ke kanan, yaitu $y = \sin (x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Pada grafik y = tan x, kita dapati bahwa grafik melewati (0, 0) dan nilainya semakin besar tanpa batas untuk x mendekati $\frac{\pi}{2}$ (dari arah kiri), kemudian untuk x mendekati $\frac{\pi}{2}$ (dari arah kanan), nilai fungsi juga menuju negatif tak hingga tanpa batas. Selanjutnya nilai fungsi menuju 0 untuk x menuju π, dan akhirnya melewati titik $(\pi, 0)$. Demikian seterusnya sehingga grafik fungsi y = tan x memiliki periode sebesar π dan garis $x = \frac{\pi}{2}$, $\pi + \frac{\pi}{2}$, $2\pi + \frac{\pi}{2}$, ... disebut asimptot fungsi karena didekati oleh grafik tersebut dan nilai fungsinya tidak ada.

Penugasan 11.1

Tujuan: Mendata kondisi yang menggambarkan keadaan limit dalam kehidupan sehari-hari
Media: Lingkungan sekitar, buku dan alat tulis
Langkah-langkah:
1. Berkelilinglah dan amatilah lingkungan di sekitarmu.
2. Catatlah setiap kondisi yang kamu amati yang menurutmu menggambarkan keadaan limit.
3. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor.

Yang perlu kita pahami bahwa limit memiliki nilai batas yang didekati dan nilai yang mendekati. Misalkan diberikan fungsi f(x), maka nilai fungsi f akan mendekati nilai tertentu a untuk x mendekati d, dapat dituliskan $\lim\limits_{x \to d} f(x) = a$ sehingga idealnya kita peroleh nilai x yang nilainya **mendekati** nilai d sesuai dengan fungsi yang diberikan. Kata limit berlaku apabila x mendekati d ($x \to d$), tetapi $x \neq 0$. Kalimat lainnya adalah nyaris sama, tetapi **tidak sama**.

Pada beberapa hal, nilai limit fungsi sama dengan nilai fungsinya misalnya seperti $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$, dan sejenisnya. Namun, nilai limit fungsi tidak selalu ada atau sama dengan nilai fungsinya.

$\lim\limits_{x \to \pi/2} \tan x =$ tidak ada karena nilai limit fungsi dari kiri dan dari kanan tidak sama

Selain satuan radian, kita juga dapat menggunakan satuan sudut derajat atau satuan lainnya sehingga dapat dituliskan

$$\lim_{x \to 90^\circ} \sin x = \sin 90^\circ = 1$$

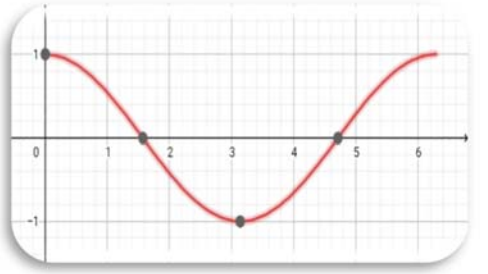
Untuk fungsi-fungsi yang lainnya juga dapat kita tuliskan secara matematis.

$$\lim_{x \to 180^\circ} \cos x = \cos 180^\circ = 0$$
$$\lim_{x \to 45^\circ} \tan x = \tan 45^\circ = 1/2\sqrt{2}$$
$$\lim_{x \to 60^\circ} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} 60^\circ = 2/\sqrt{3}$$
$$\lim_{x \to 0^\circ} \sec x = \sec 0^\circ = 1/1 = 1$$

Penentuan limit fungsi trigonometri dilakukan dengan substitusi langsung, menggunakan operasi atau manipulasi matematika seperti sifat-sifat identitas dan teorema trigonometri apabila memiliki bentuk tak tentu.

B. Seberapa Besar atau Jauh

Perhatikan grafik fungsi y = cos x berikut. Untuk menggambar grafik tersebut secara lebih presisi dapat dihubungkan pasangan titik-titik yang dilewati fungsi dengan kurva mulus. Nilai fungsi dapat ditentukan dengan menggunakan kalkulator. Pastikan mode yang digunakan adalah radian. Hasil perhitungan nilai-nilai fungsi dapat disajikan dalam table berikut.



Tabel 11. 2 Nilai-Nilai Yang Mendekati Dari Fungsi cos x

X	*Cos x*
1,0	0,540302
0,5	0,877583
0,1	0,995004
0,01	0,999950
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,999950
-0,1	0,995004
-0,5	0,877583
-1,0	0,540302

Dengan x = 0,00001 maka nilainya akan mendekati angka 1. Kita juga dapatkan bahwa untuk x = 0, diperoleh cos 0 = 1. Dapat disimpulkan

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

Pada contoh di atas, nilai $\lim_{x \to 0} \cos x$ dapat ditentukan dengan **mensubstitusikan** nilai yang didekati. Mari kita lihat contoh soal 1.1 dan 1.2 di bawah ini.

Contoh Soal 1.1

Nilai dari $\lim_{x \to \pi/2} \cos x$ adalah….

Penyelesaian:

Substitusikan nilai $x = \pi/2$ pada persamaan fungsi.

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos x = \cos \pi/2 = \cos 90^0$$

$$= 0$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x \to \pi/2} \cos x$ adalah 0.

Contoh Soal 1.2

Nilai dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan x$ adalah….

Penyelesaian:

Substitusikan nilai x = $\frac{\pi}{6}$ pada persamaan fungsi.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan x = \tan \frac{\pi}{6} = \tan 30^o$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \tan x$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Berapakah nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$? Kita tidak dapat melakukan substitusi langsung karena akan menghasilkan bentuk tak tentu. Gunakan kalkulator yang telah diatur ke dalam mode radian untuk membantu kita memperoleh nilai $\frac{\sin x}{x}$.

Tabel 11. 3 Nilai $\frac{\sin x}{x}$ Dengan Nilai x Yang Mendekati 0

X	$\frac{\sin x}{x}$
1,0	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,99998
-0,1	0,99833
-0,5	0,95885
-1,0	0,84147

Setelah disubstitusikan dengan nilai x yang berada di sekitar 0 seperti pada Tabel diperoleh kesimpulan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Penugasan 11.2

Tujuan: Mencari nilai limit secara manual menggunakan kalkulator

Media yang digunakan: *Scientific calculator*, buku dan alat tulis

Langkah-langkah:

1. Membuktikan $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
   a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.
   b. Datalah nilai-nilai $\frac{\tan x}{x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.
   c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?
   d. Simpulkan!

X	$\frac{\tan x}{x}$
1,0	………
0,5	………
0,1	………
0,01	………
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	………
-0,1	………
-0,5	………
-1,0	………

2. Menentukan $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$
   a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.
   b. Hitunglah nilai-nilai $\frac{\cos x}{x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.
   c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?
   d. Simpulkan!

X	$\frac{\cos x}{x}$
1,0	………
0,5	………
0,1	………
0,01	………
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	………
-0,1	………
-0,5	………
-1,0	………

3. Menentukan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$

e. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.

f. Hitunglah nilai-nilai $\frac{\cos x}{x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.

g. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?

h. Simpulkan!

X	$\frac{\cos x}{x}$
1,0	....
0,5	....
0,1	....
0,01	....
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	....
-0,1	....
-0,5	....
-1,0	....

4. Membuktikan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.

b. Datalah nilai-nilai $\frac{\tan x}{x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.

c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?

d. Simpulkan!

X	$\frac{\tan 2x}{3x}$
1,0	....
0,5	....
0,1	....
0,01	....
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	....
-0,1	....
-0,5	....
-1,0	....

5. Membuktikan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \frac{2}{3}$

a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.

b. Datalah nilai-nilai $\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.

c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?

d. Simpulkan!

X	$\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$
1,0	....
0,5	....
0,1	....
0,01	....
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	....
-0,1	....
-0,5	....
-1,0	....

6. Membuktikan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}$

a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.

b. Datalah nilai-nilai $\frac{\tan 5x}{\sin 7x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.

c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?

d. Simpulkan!

X	$\frac{\tan 5x}{\sin 7x}$
1,0	....
0,5	....
0,1	....
0,01	....
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	....
-0,1	....
-0,5	....
-1,0	....

7. Membuktikan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$

a. Substitusikan nilai x dengan 0. Apabila hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$, maka lakukan langkah kedua.

b. Datalah nilai-nilai $\frac{3x}{\sin 2x}$ yang diperlukan dengan menggunakan kalkulator yang diatur dalam mode radian.

c. Mendekat ke angka berapakah nilai yang bertanda Tanya?

d. Simpulkan!

X	$\frac{3x}{\sin 2x}$
1,0	....
0,5	....
0,1	....
0,01	....
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	....
-0,1	....
-0,5	....
-1,0	....

Membuktikan limit atau mencari limit melalui definisi, atau melalui tabel perhitungan tentu tidak praktis. Kita perlu menggunakan rumus atau teorema limit, manipulasi atau operasi matematika, untuk menyelesaikan hampir semua masalah limit. Misalnya:

1. Menggunakan operasi matematika: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$ (1)(1) = 1
2. Menggunakan berbagai nilai fungsi di sekitar limit: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$. Apabila diambil serangkaian nilai-nilai x yang mendekati nol, maka akan diperoleh nilai yang berayun secara liar. Jelas, limit tersebut tidak mendekati nilai tertentu. Limit kiri dan kanannya tidak sama. Disimpulkan, bahwa limit yang dicari tidak ada.
3. Menggunakan operasi matematika: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x(3/2)} = 2/3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} = 2/3$

Setelah mengerjakan Penugasan 1.2 tersebut, kita mendapatkan beberapa bentuk yang lebih spesifik. Beberapa bentuk tersebut dapat dituliskan menjadi:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

Perlu Diingat Kembali

1. $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$
2. $\cos 2a - 1 = -2\sin^2 a$
3. $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$
4. $ctg\ a = \frac{1}{\tan a}$
5. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\ .\ \sin\frac{1}{2}(A-B)$

Contoh Soal 1.3

Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin 3x}$ adalah….

Penyelesaian:

Gunakan sifat limit di atas sehingga diperoleh

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin 3x}=\frac{4}{3}$

Contoh Soal 1.4

Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$ adalah….

Penyelesaian:

Gunakan sifat limit di atas sehingga diperoleh

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\frac{2}{3}$

Pada limit fungsi trigonometri sederhana Anda dapat langsung menentukan nilai limitnya dengan cara mensubstitusikan nilai yang didekati. Namun, pada kasus tertentu harus melalui operasi matematika terlebih dahulu. Contohnya untuk bentuk limit $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin a(x-a)}{b(x-a)}$ dapat kita misalkan dahulu $p = x - a$ sehingga

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin a(x-a)}{b(x-a)}=\lim_{p\to 0}\frac{\sin ap}{bp}=\frac{a}{b}$$

Bentuk lain yaitu $\lim\limits_{x\to a}\frac{\tan a(x-a)}{b(x-a)}$ dapat juga dimisalkan dahulu $p = x - a$ sehingga

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan a(x-a)}{b(x-a)}=\lim_{p\to 0}\frac{\tan ap}{bp}=\frac{a}{b}$$

Perhatikan contoh soal berikut ini!

Contoh Soal 1.5

Nilai dari $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ adalah....

Penyelesaian:

Substitusikan nilai $x=\frac{\pi}{2}$ atau $x = 90^o$ dan hitung hasilnya.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin 90^o}{\cos^2 90^o}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Karena hasilnya dalam bentuk $\frac{0}{0}$ yang merupakan **bentuk tak tentu**, kita harus menyederhanakan bentuk fungsi tersebut dengan cara pemfaktoran. Ingat bahwa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dan $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

diperoleh $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\sin x)}$

Substitusikan nilai $x=\frac{\pi}{2}$ atau $x = 90^o$ pada persamaan fungsi.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\sin x)}=\frac{1}{(1+\sin 90^o)}=\frac{1}{1+0}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ adalah 1.

Contoh Soal 1.6

Berapakah $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3\sin(x-2)}{(4x-8)}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3\sin(x-2)}{(4x-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\sin(x-2)}{4(x-2)}=3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3\sin(x-2)}{(4x-8)}$ adalah $\frac{3}{4}$.

Latihan Unit 11.1

Tentukan nilai limit dari:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{\cos 8x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos 4x-3}{2.\sin^2 3x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan x}{x\sin x - \cos x + 1}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 5x - \cos 9x}{1-\sqrt{\cos x}}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}$

Teorema limit utama

Andaikan n bulat, k konstata, serta f dan g fungsi yang memiliki limit di c. Maka:

a. Limit fungsi konstan adalah konstan: $\lim\limits_{x\to c} k$ = k

b. $\lim\limits_{x\to c} x$ = c

c. $\lim\limits_{x\to c} kf(x)$ = k $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

d. limit jumlah adalah jumlah limit: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ = $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ + $\lim\limits_{x\to c} g(x)$

e. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]$ = $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ – $\lim\limits_{x\to c} g(x)$

f. limit kali adalah kali limit: $\lim\limits_{x\to c}[f(x).g(x)]$ = $\lim\limits_{x\to c} f(x)$. $\lim\limits_{x\to c} g(x)$

g. $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ = $\frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

h. limit pangkat adalah pangkat dari limit: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n$ = $\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$

i. limit akar adalah akar dari limit: $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)}$ = $\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} f(x) >$ 0 untuk n genap

Contoh.

1. $\lim\limits_{x\to 3} 2\tan^4 x$ = 2$\left[\lim\limits_{x\to 3} \tan x\right]^4$ = 2tan^4 3

2. $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2-2x)$ = $\lim\limits_{x\to 4} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 4} 2x$ = 3(4)^2 – 2(4) = 40

3. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$ = $\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4} x}$ = $\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(x^2+9)}}{\lim\limits_{x\to 4} x}$ = $\frac{\sqrt{4^2+9}}{4}$ = $\frac{5}{4}$

4. jika $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ = 4 dan $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ = 8, tentukan $\lim\limits_{x\to 3}[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}]$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema limit, secara langsung diperoleh

$\lim\limits_{x\to 3}[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}]$ = (4)^2.$\sqrt[3]{8}$ = 32

Teorema apit

Andaikan f, g dan h memenuhi sifat f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) untuk semua x yang dekat c, kecuali mungkin di c. Jika, $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to c} h(x)$ = L, maka $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ = L

Contoh.

Dari pertidaksamaan 1 – x^2/6 ≤ (sin x)/x ≤ 1 untuk x dekat ke 0, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ = 1

Bukti.

Dari teorema apit, diperoleh $\lim\limits_{x\to 0} 1-\frac{x^2}{6}$ = 1 – 0 = 1 dan $\lim\limits_{x\to 0} 1$ = 1. Jadi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ = 1.

Penerapan turunan fungsi untuk menentukan limit: Aturan L'Hopital.

Apabila lim f(x) = lim g(x) = 0 atau ± ∞, maka jika lim [f'(x)/g'(x)] ada, baik terhingga atau tak hingga, maka: lim $\frac{f(x)}{g(x)}$ = lim $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Contoh.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3\sec^2 3x} = \frac{2\cos 2(0)}{3\sec^2 3(0)} = 2/3$$

UNIT 11.2 BANYAK TIDAK TERHINGGA

Sumber: https://mongabay.co.id/2018/04/01/indahnya-glassfish-kumpulan-ikan-kecil-yang-menawan-di-lautan/

Gambar 11. 6 Ikan Glassfish yang Tidak Terhitung Banyaknya

Pernahkah Anda melihat kumpulan *glassfish* seperti gambar di atas? Glassfish adalah salah satu jenis ikan yang ada di laut. Jumlahnya sangat banyak. Dapatkah Anda menghitung *glassfish* yang ada di laut Jawa? Sampai saat ini belum bisa ditentukan secara persis atau akurat banyaknya *glassfish* di laut Jawa. Kondisi ini disebut **tidak terhitung banyaknya.** Dapatkan dikatakan sebagai **tak hingga** banyaknya. Demikian juga untuk jarak yang jauh, misalnya jarak bumi-bulan, bumi-matahari, dan bumi dengan planet atau benda angkasa lainnya juga tak hingga jauhnya.

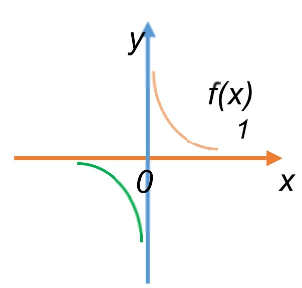
Penugasan 1.3

Tujuan: Mendata kondisi yang menggambarkan hal yang tidak terhitung dalam kehidupan sehari-hari
Media: Lingkungan sekitar, buku dan alat tulis
Langkah-langkah:

1. Berkelilinglah dan amatilah lingkungan di sekitarmu
2. Catatlah setiap kondisi yang kamu amati yang menurutmu menggambarkan ketakhinggaan.
3. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor.

A. Limit Fungsi Aljabar di Ketakhinggaan

Saat kita membagi 1 buah roti menjadi 2, kita memperoleh 2 potong roti. Saat kita membagi 1 buah roti tersebut menjadi 10, kita memperoleh 10 potong roti dengan ukuran yang dapat dilihat dengan panca indera kita. Saat kita membagi 1 buah roti tersebut menjadi 1.000, menjadi 1.000.000, dan seterusnya semakin kecil ukuran potongan roti yang diperoleh sehingga seukuran pasir, debu, dan ukuran lebih kecil lagi. Kita katakan, pembagian potongan roti tersebut membesar sampai **tak hingga** dan ukuran potongan roti menjadi semakin kecil mendekati ukuran nol.



Gambar 1. 7 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ di atas. Menurut Anda, berapakah nilai $\frac{1}{x}$ apabila x membesar tanpa batas atau $x \to \infty$? Lihat Tabel 1.4 berikut.

Tabel 1. 4 Hubungan Nilai x dan $f(x) = \frac{1}{x}$

X	1	2	10	1.000	1000.000	...	$\to \infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	0,5	0,1	0,001	0,000001	...	$\to 0$

Pada Tabel 1.4 terlihat bahwa semakin besar nilai x maka semakin kecil nilai $\frac{1}{x}$. Kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $x \to \infty$, nilai $\frac{1}{x}$ menuju nol. Kita dapat menuliskannya secara matematis sebagai.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Penugasan 1.4

Tujuan: Membuktikan bahwa nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan nilai $x \to -\infty$ adalah menuju nol
Media: Alat tulis dan buku tulis
Langkah-langkah:

1. Buatlah tabel hubungan seperti pada pembuktian nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ *dengan* $x \to \infty$.
2. Masukkan nilai yang memuat $x \to \infty$
3. Analisislah dan tariklah kesimpulannya
4. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor.

Secara umum, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $k \in R$ berlaku:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \text{ dan } \lim_{x\to\infty} kx^n = \infty$$

Penugasan 1.5

Tujuan: Membuktikan bahwa nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n}$ dengan nilai $x \to \infty$ adalah menuju nol dan nilai $\lim_{x\to\infty} kx^n$ dengan nilai $x \to \infty$ adalah menuju tak hingga
Media: Alat tulis
Langkah-langkah:

Membuktikan bahwa nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n}$ dengan nilai $x \to \infty$ adalah menuju nol:

1. Buatlah tabel hubungan seperti pada pembuktian nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n}$ *dengan* $x \to \infty$.
2. Masukkan nilai yang memuat $x \to \infty$
3. Analisislah dan tariklah kesimpulannya
4. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor

Membuktikan bahwa nilai $\lim_{x\to\infty} kx^n$ dengan nilai $x \to\infty$ adalah menuju tak hingga:

1. Buatlah tabel hubungan seperti pada pembuktian nilai $\lim_{x\to\infty} kx^n$ *dengan* $x \to\infty$.
2. Masukkan nilai yang memuat $x \to\infty$
3. Analisislah dan tariklah kesimpulannya
4. Bila terdapat kendala, coba konsultasikan dengan tutor

Beberapa bentuk limit fungsi aljabar lainnya diantaranya sebagai berikut:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$
2. $\lim_{x\to\infty} [f(x)+g(x)]$
3. $\lim_{x\to\infty} [f(x)-g(x)]$

Layaknya operasi hitung pada bilangan bulat, kita juga dapat melakukan operasi matematika beberapa fungsi aljabar dalam menentukan limit fungsi. Untuk menentukan nilai limit dari bentuk-bentuk tersebut, dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut

Untuk menentukan nilai limit dari bentuk $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dilakukan dengan cara membagi dengan pangkat tertinggi, yaitu membagi *f(x) dan g(x)* dengan pangkat yang tertinggi *x* dari penyebut atau fungsi *g(x)*. Misalkan $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + ...}{px^n + qx^{n-1} + ...}$ dengan *m* adalah pangkat tertinggi *f(x)* dan *n* adalah pangkat tertinggi penyebut *g(x)*. Jika $m < n$, maka $L = 0$. Jika $m = n$, maka $L = \frac{a}{p}$. Jika $m > n$, maka $L = \infty$ untuk $\frac{a}{p} > 0$ atau $L = -\infty$ untuk $\frac{a}{p} < 0$.

Contoh Soal 1.7

Tentukan nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-1}{4x+1}$

Penyelesaian:

Perhatikan pangkat tertinggi dari *x* pada $g(x) = 4x + 1$ yaitu satu. Untuk menentukan nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{8x-1}{4x+1}$, fungsi $f(x) = 8x - 1$ dan $g(x) = 4x + 1$ masing-masing dibagi dengan *x* sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x-1}{4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{8-0}{4+0} = \frac{8}{4}$$
$$= 2$$

Perlu Diingat

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Contoh Soal 1.8

Tentukan nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{8x+1}{x^2-x}$

Penyelesaian

Perhatikan pangkat tertinggi dari *x* pada $g(x) = x^2 - 1$ yaitu 2. Untuk menentukan nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{8x+1}{x^2-x}$, $f(x) = 8x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 1$ dibagi dengan x^2 sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1}$$
$$= 0$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{8x+1}{x^2-x}$ adalah 0.

Penugasan 1.6: Kelompok

Tujuan: Mengerjakan soal-soal dan memeriksa secara silang dalam satu kelompok

Media: Alat tulis dan buku tulis

Langkah-langkah:

1. Kerjakanlah soal berikut secara berkelompok maksimal sebanyak 3 orang.
2. Setiap anggota kelompok mengerjakan masing-masing 2 buah soal.
3. Setelah semua anggota kelompok selesai mengerjakan, setiap anggota menukar jawaban masing-masing secara melingkar dan saling memeriksa tiap jawaban anggota kelompok (membentuk lingkaran kecil).
4. Soal:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2+5}$ b. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+7x+6}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x+7}{x^2+2x+8}$ d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+2}{-2x+3}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x-8}}$ f. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2+5}}{2x-\sqrt{x^2+2x-8}}$

Tips 1.1

Kita dapat menentukan nilai limit fungsi pecahan untuk $x \to \infty$ dengan menyederhanakannya yaitu hanya memperhatikan masing-masing suku berpangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut.

Contoh Soal 1.9

Contoh $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{4x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{4x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{3}{4}$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{4x-1}$ adalah $\dfrac{3}{4}$.

b. Menyederhanakan bentuk sekawan

Beberapa bentuk limit fungsi yang menghasilkan bentuk $\infty - \infty$, dapat disederhanakan fungsinya dengan melakukan operasi matematika melalui perkalian yang melibatkan bentuk sekawan.

Contoh Soal 1.10

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$

Penyelesaian:

Apabila disubstitusikan limit tersebut menghasilkan bentuk $\infty - \infty$, sehingga kita dapat melakukan operasi matematika yang melibatkan bentuk sekawan, yaitu:

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \times \dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ ($\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$ dan $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}$ adalah sekawan)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3-x-2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ *(bagi dengan $\sqrt{x}$ atau $x^{\frac{1}{2}}$)*

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{0}{2} = 0$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$ adalah 0.

Contoh Soal 1.11

Tentukan hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+7x+3} - x$!

Penyelesaian:

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x+3} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x+3} - x \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+8x+3}+x}{\sqrt{x^2+8x+3}+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+8x+3-x^2}{\sqrt{x^2+8x+3}+x}$ (Gunakan tips 1.1)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x}{\sqrt{x^2}+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x}{x+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x}{2x}$

$= 4$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+7x+3} - x$ adalah 4.

Penugasan 1.7: Kelompok

Tujuan: Membuktikan rumus $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q} = \dfrac{b-p}{2\sqrt{a}}$

Media: Alat tulis dan buku tulis

Langkah-langkah:

1. Berkelompoklah dengan temanmu sebanyak 3 -4 orang dalam satu kelompok.
2. Gunakan tips 1.1 untuk mengerjakannya secara individu.
3. Bertukarlah jawaban masing-masing anggota kelompok dan periksalah jawaban temanmu.
4. Diskusikan manakah jawaban yang benar dan letak salah jawaban tiap anggota kelompok.

B. Limit Fungsi Trigonometri Menuju Tak Hingga

Pada umumnya cara mengerjakan limit fungsi trigonometri sama dengan cara mengerjakan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode substitusi langsung nilai yang didekati. Lihat contoh 1.14 berikut.

Contoh Soal 1.12

Tentukan limit dari fungsi trigonometri menuju tak hingga berikut:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} 2 \cos \frac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cos \frac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{2}$

Penyelesaian:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$ adalah 0.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} 2 \cos \frac{1}{x} = 2 \cos 0 = 2.1 = 2$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \infty} 2 \cos \frac{1}{x}$ adalah 2.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cos \frac{1}{x} = \infty . \cos 0 = \infty \, . \, 1 = \infty$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} x \cos \frac{1}{x}$ adalah ∞.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2} \, . \lim\limits_{x \to \infty} \tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \, . \, \tan 0 = \frac{1}{2} \, . \, 0 = 0$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{2}$ adalah 0.

Pada limit fungsi trigonometri juga terdapat bentuk tak tentu seperti 0 . ∞, ∞ . 0, atau $\frac{\infty}{\infty}$ dan juga ada yang tidak dapat ditentukan. Perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal 1.13

Tentukan nilai dari:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{bx}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (1 - \cos \frac{4}{x})$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$

Penyelesaian:

1. Apabila disubsitusikan akan menghasilkan bentuk tak tentu.

Misal: $y = \frac{1}{x}$, berarti $x = \frac{1}{y}$

Untuk $x \to \infty$, menghasilkan bentuk $y \to 0$, jadi dapat dituliskan

Sehingga $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{bx} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{y} \sin (\frac{a}{b} y)$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin (\frac{a}{b} y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{a}{b} \frac{\sin (\frac{a}{b} y)}{(\frac{a}{b} y)} = \frac{a}{b}$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{bx}$ adalah $\frac{a}{b}$.

2. Misal: $y = \frac{1}{x}$, berarti $x = \frac{1}{y}$

Untuk $x \to \infty$, maka $y \to 0$

Sehingga $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (1 - \cos \frac{4}{x}) = \lim\limits_{y \to 0} (\frac{1}{y})^2 (1 - \cos \frac{4}{\frac{1}{y}})$

$$= \lim_{y \to 0} (\frac{1}{y})^2 (1 - \cos 4y) = \lim_{y \to 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 2y)}{y^2}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2\sin^2 2y}{y^2} = \frac{2.2^2}{1^2} = 2.4 = 8$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (1 - \cos \frac{4}{x})$ adalah 8.

3. Jika kita substitusikan langsung, maka kita akan menemukan bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos \infty}{\infty}$ yang merupakan bentuk tak tentu

Persoalan seperti ini dapat diselesaikan dengan **Teorema Apit** yang berbunyi:

"Misalkan *f*, *g*, dan *h* adalah fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua *x* yang mendekati a. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$."

Sehingga $(-1 \leq \cos x \leq 1)$ dibagi x

$\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} \leq 0$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$ adalah 0.

C. Melihat Lingkungan Sekitar

Konsep turunan dan integral yang banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari seperti untuk mengukur kecepatan atau percepatan objek bergerak, kecepatan benda jatuh, kecepatan peluru, pertumbuhan populasi, kecepatan debit aliran air, luas daerah dan volume benda putar, dan sebagainya, sedangkan turunan dan integral diperlukan limit fungsi untuk mendefinisikannya. Penerapan langsung konsep limit fungsi juga banyak digunakan untuk menentukan perilaku/grafik fungsi yang mendekati nilai tertentu atau menuju tak hingga, penentuan populasi makhluk hidup seperti bakteri atau virus, atau tingkat penularan atau penyebaran virus melalui udara.

Contoh Soal 1.14

Di diperkirakan jumlah ikan di kolam Adi dalam t tahun adalah:

$N = 30.000 + \frac{30.000}{(t+2)^2}$, N jumlah ikan dan t tahun

Berapakah jumlah ikan tersebut dalam jangka waktu yang sangat panjang di masa depan? ($t \to \infty$),

Penyelesaian:

$$\lim_{t\to\infty} N = 300.000 + \frac{30.000}{(t+2)^2}$$

$$= 300.000 + \lim_{t\to\infty} \frac{30.000}{(t+2)^2} = 300.000 + 0 = 300.000$$

Jadi, jumlah ikan dalam jangka waktu yang sangat panjang di masa depan adalah 300.000.

Contoh Soal 1.15

Suatu pabrik timah telah menghitung bahwa biaya, C (dalam rupiah), untuk menghilangkan polutan dari emisi cerobong asap, p (dalam m^3), dinyatakan dengan:

$$C(p) = \frac{7.000.000p}{90 + p}$$

Tentukan biaya maksimum untuk menghilangkan sebanyak mungkin polutan!

Penyelesaian:

Kita dapat mengasumsikan bahwa $p \to \infty$ sehingga

$$C(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{7.000.000p}{90 + p} \text{ (dibagi p)}$$

$$C(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{7.000.000p}{p}}{\frac{90}{p} + \frac{p}{p}} = \lim_{p\to\infty} \frac{7.000.000}{\frac{90}{p} + 1}$$

C(p) = 7.000.000

Jadi, biaya maksimum untuk menghilangkan sebanyak mungkin polutan adalah Rp. 7.000.000,00.

Contoh Soal 1.16

Takaran obat bius saat operasi caecar haruslah tepat dan sesuai dengan perkiraan waktu operasi selesai dilakukan. Dalam suatu percobaan medis volume obat bius yang diserap darah dinyatakan dengan:

$y = \frac{5x}{2x+3}$, y kadar obat bius dalam darah (ml), x volume obat bius yang dialirkan

Jika volume obat bius diperbanyak, berapa volume maksimum obat bius yang dapat diserap darah?

Penyelesaian:

Anggap $x \to \infty$ sehingga :

$$y_{maks} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{5}{2+0} = \frac{5}{2}$$

Jadi, volume obat bius maksimum adalah $\frac{5}{2}$ ml.

Latihan Unit 1.2

1. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{2x+3}$!
2. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2-x}$!
3. Tentukan nilai dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}$!
4. Tentukan nilai dari $\lim_{x\to\infty} 3 \operatorname{cosec} \frac{1}{x}$!
5. Tentukan nilai dari $\lim_{x\to\infty} 2 \tan \frac{1}{x}$!
6. Dalam suatu percobaan medis banyaknya glukosa dalam darah yang mampu diserap darah dalam mg/dL dinyatakan dengan:

   $$y = \frac{x}{3x+2} .100$$

   Jika banyaknya glukosa dalam darah diperbanyak, maka berapa volume maksimum glukosa yang dapat diserap darah?

Rangkuman

1. Jika x mendekati a, tetapi tidak sama dengan a, maka nilai f(x) mendekati L, ditulis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
2. Limit fungsi ada jika limit kiri fungsi = limit kanan fungsi
   Jika x mendekati a dari kiri, kita tulis $x \to a^-$ dan x mendekati a dari kanan kita tulis $x \to a^+$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada apabila
   $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$
3. **Teorema limit utama.** Andaikan n bulat, k konstata, serta f dan g fungsi yang memiliki limit di c. Maka:
   a. Limit fungsi konstan adalah konstan: $\lim\limits_{x \to c} k = k$
   b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
   c. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
   d. limit jumlah adalah jumlah limit: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
   e. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
   f. limit kali adalah kali limit: $\lim\limits_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$
   g. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
   h. limit pangkat adalah pangkat dari limit: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$
   i. limit akar adalah akar dari limit: $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ untuk n genap

4. **Teorema apit.** Andaikan f, g dan h memenuhi sifat f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) untuk semua x yang dekat c, kecuali mungkin di c. Jika, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$
5. **Aturan L'Hopital.** Apabila lim f(x) = lim g(x) = 0 atau ± ∞, maka jika lim [f'(x)/g'(x)] ada, baik terhingga atau tak hingga, maka: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
6. Identitas trigonometri
   a. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
   b. $\cot x = \text{ctg } x = \frac{1}{\tan x}$
   c. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
   d. $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
   e. sin (x + y) = sin x cos y + cos x sin y
   f. cos (x + y) = cos x cos y - sin x sin y
   g. sin x = cos(π/2 – x)
7. Turunan fungsi dasar trigonometri
   a. f(x) = sin x, maka f'(x) = cos x
   b. f(x) = cos x, maka f'(x) = -sin x
   c. f(x) = tan x, maka $f'(x) = \sec^2 x$
8. Limit fungsi trigonometri dasar dan yang diturunkan melalui operasi matematika:
   a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
   b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
   c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
   d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
   e. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
9. Limit fungsi di tak hingga:
   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, n > 0
   b. $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$, n > 0
10. Strategi untuk menyelesaikan limit fungsi:
   a. Menggambar grafik/membuat tabel nilai fungsi di sekitar limit yang dicari. Cara ini dapat ditentukan apabila nilai-nilai limit fungsi tidak berayun secara liar
   b. Substitusi langsung nilai limit ke nilai fungsi sehingga menghasilkan bentuk tertentu. Cara ini tak bisa digunakan pada limit fungsi apabila disubstitusikan nilai limitnya menghasilkan bentuk tak tentu seperti : 0/0, ± ∞/∞, ∞ - ∞, 0^0, 0×∞, ∞^0, ∞^∞ atau menghasilkan pembagian dengan nol.
   c. Menggunakan rumus, teorema atau sifat limit
   d. Melakukan operasi matematika (seperti faktorisasi, perkalian dengan bentuk sekawan, dan operasi matematika lainnya) pada limit fungsi pada bentuk tak tentu terhadap fungsi sehingga menjadi bentuk lebih sederhana atau bentuk matematika lainnya dan dapat dilakukan substitusi langsung
      Misal $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = (1)(1) = 1$
   e. Menggunakan rumus, teorema atau sifat turunan

Latihan Akhir Modul

Pilihlah Jawaban yang Tepat Pada Soal-Soal Berikut!

1. Nilai dari $\lim_{x\to3}\frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$ adalah....
   a. $\frac{5}{4}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. $\frac{4}{5}$
   d. $\frac{7}{5}$
   e. 0
2. Nilai dari $\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$adalah....
   a. $\frac{1}{4}$
   b. 1
   c. 2
   d. 4
   e. ~
3. Nilai dari $\lim_{x\to4}\frac{3x^2-14x+8}{x^2-3x-4}$ adalah....
   a. 4
   b. 2
   c. $\frac{1}{2}$
   d. -2
   e. -4
4. Nilai $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}$ adalah...
   a. 2
   b. 1
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{3}$
   e. $\frac{1}{6}$
5. Nilai dari $\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ adalah....
   a. 2
   b. 1
   c. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. $-\frac{1}{6}$
6. Nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 5x}{6x}$ adalah....
   a. 2
   b. 1
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{3}$
   e. -1
7. Hasil dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$ adalah....
   a. 2
   b. 1
   c. 0
   d. -1
   e. -2
8. Nilai $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ adalah....
   a. 2
   b. 1
   c. 0
   d. -1
   e. -2
9. Nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin 3x\cos 2x}{2x^3}$ adalah....
   a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. $\frac{3}{2}$
   d. 2
   e. 3
10. Nilai dari $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{4-x}$ adalah....
   a. $-\frac{1}{2}$
   b. $-\frac{1}{6}$
   c. 0
   d. $\frac{1}{6}$
   e. $\frac{1}{2}$

Rubrik Dan Kunci Jawaban Latihan

Latihan Unit 11.1

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
1	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{\cos 8x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{\cos 8x-1}$	1
	$=\lim_{x\to0}\frac{2.\sin^2 3x}{-2.\sin^2 4x}$	1
	$=-1\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\right)^2$	1
	$=-\left(\frac{3}{4}\right)^2$	1
	$=-\left(\frac{9}{16}\right)$	1
	Jadi, nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{\cos 8x-1}$ adalah $-\frac{9}{16}$.	1
2	$\lim_{x\to0}\frac{3\cos 4x-3}{2.\sin^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{3(\cos(4x)-1)}{2.\sin^2 3x}$	1
	$=\lim_{x\to0}\frac{3(-2\sin^2 2x)}{2.\sin^2 3x}$	1
	$=\lim_{x\to0}-3\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^2$	1
	$=-3\left(\frac{2}{3}\right)^2$	1
	$=-\left(\frac{4}{3}\right)$	1
	Jadi, nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{3\cos 4x-3}{2.\sin^2 3x}$ adalah $-\frac{4}{3}$.	1
3	$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$	1
	$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}$	1
	$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{\sin^2 x}$	1
	$=1\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin^2 x}-\frac{\sin x}{\sin^2 x}\right)$	1
	$=1\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}\right)$	1
	$=1.0=0$	1
	Jadi, nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ adalah 0.	1

4	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{x\sin x-\cos x+1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{x\sin x-(1-2\sin^2\frac{1}{2}x)+1}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x\tan x}{x\tan x}}{\frac{x\sin x+2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x\tan x}}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{x\sin x+2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x\tan x}}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{x\sin x}{x\tan x}+\frac{2\sin\frac{1}{2}x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\tan x}}$ $=\frac{1}{1.1+2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$ Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{x\sin x-\cos x+1}$ adalah $\frac{2}{3}$.	1 1 1 1 1 1 1
5	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 9x}{1-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 9x}{1-\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos 5x-\cos 9x)(1+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(-2\sin(\frac{5x+9x}{2})\sin(\frac{5x+9x}{2}))(1+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(-2\sin 7x\sin(-2x))(1+\sqrt{\cos x})}{2\sin^2\frac{1}{2}x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2(\sin 7x\sin(-2x))(1+\sqrt{\cos x})}{2\sin\frac{1}{2}x.\sin\frac{1}{2}x}$ $=\frac{2(7)(-2)(1+\sqrt{\cos 0})}{2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}$ $=(-14)(-4)(1+\sqrt{1})=112$ Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 9x}{1-\sqrt{\cos x}}$ adalah 112.	1 1 1 1 1 1 1 1
6	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x+\tan^2x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{\tan^2x}{\frac{1}{2}x^2}\right)$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\frac{1}{2}x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{\frac{1}{2}x^2}$ $=2.\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{x}+2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\tan x}{x}$ $=2.\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ $=2.1.1+2.1.1$ $=4$	1 1 1 1 1 1
	Skor maksimum	40

Nilai Latihan 1.1 = $\frac{\text{skor yang diperoleh}}{40}$ x 100

Latihan Unit 1.2

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x+3}=\ldots$ Perhatikan pangkat tertinggi dari x pada $g(x)=2x+3$ yaitu satu. Untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x+3}$, fungsi $f(x)=5x^2-1$ dan $g(x)=2x+3$ masing-masing dibagi dengan x sehingga diperoleh: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$ $=\frac{5-\frac{1}{\infty^2}}{2+\frac{3}{\infty^2}}$ $=\frac{5-0}{2+0}$ $=\frac{5}{2}$ Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x+3}$ adalah $\frac{5}{2}$.	1 1 1 1 1 1 1 1

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
2	Perhatikan pangkat tertinggi dari x pada $g(x) = 2x^2 - x$ yaitu 2.	1
	Untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2-x}$, $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = 3x^2 - x$ dibagi dengan x^2 sehingga diperoleh:	1
	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}$	1
	$= \frac{\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{2-\frac{1}{\infty}}$	1
	$= \frac{0+0}{1+0}$	1
	$= \frac{0}{1} = 0$	1
	Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x^2-x}$ adalah 0.	1
3	$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2} \times \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+4)-(x+2)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+4-x-2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$ (bagi dengan $\sqrt{x}$ atau $x^{\frac{1}{2}}$)	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}}}$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}}}$	1
	$= \frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{0}{2} = 0$	1
	Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}$ adalah 0.	1
4	$\lim\limits_{x\to\infty} 3 \operatorname{cosec} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3 \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$	1
	$= 3 \cdot \frac{1}{\sin 0}$	1
	$= 3 \cdot \frac{1}{0}$	1
	$= 0$	1
	Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} 3 \operatorname{cosec} \frac{1}{x}$ adalah 0.	1
5	$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \tan \frac{1}{x} = 2 \cdot \tan 0$	1
	$= 2 \cdot 0$	1
	$= 0$	1
	Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} 2 \tan \frac{1}{x}$ adalah 0.	1
6	Anggap $x \to \infty$ sehingga :	1
	$y_{maks} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{3x+2} . 100$	1
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}} . 100$	1
	$= \frac{1}{3+0} . 100$	1
	$= \frac{100}{3}$	
	Jadi, maksimum glukosa yang dapat diserap darah adalah $\frac{100}{3}$	1
	mg/dL.	1
	Skor Maksimum	39

$$\text{Nilai Latihan 1.2} = \frac{\text{skor yang diperoleh}}{39} \times 100$$

Latihan Akhir Modul

A. Pilihan Ganda

No.	Deskripsi Jawaban	Skor
1	Nilai dari $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$ adalah… Karena limit tersebut tidak menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$ sehingga kita langsung dapat memasukkan nilai yang didekati ke dalam persamaan $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x^2-2x-8} = \frac{(3)^2-16}{(3)^2-2(3)-8}$ $= \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$ Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$ adalah $\frac{7}{5}$. (D).	1

2	Nilai dari $\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$ adalah.... $\lim_{x\to2}\left(\frac{4(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{4x+8-8}{(x-2)(x+2)}\right)$ $=\lim_{x\to2}\left(\frac{4x}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right)$ Perhatikan pangkat tertinggi dari x pada $g(x) = x^2 - 4$ yaitu dua. Untuk menentukan nilai $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x+3}$, fungsi $f(x) = 5x^2 - 1$ dan $g(x) = 2x + 3$ masing-masing dibagi dengan x sehingga diperoleh: $=\lim_{x\to2}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}$ $=\frac{\frac{4}{2}}{1+\frac{4}{2^2}}=\frac{2}{1+1}=1$ Jadi, nilai $\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$ adalah 1 (B).	1
3	Nilai dari $\lim_{x\to4}\frac{3x^2-14x+8}{x^2-3x-4}$ adalah.... Kita faktorkan $\lim_{x\to4}\frac{3x^2-14x+8}{x^2-3x-4}$ sehingga $\lim_{x\to4}\frac{(3x-2)(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{(3x-2)}{(x+1)}=\frac{(3(4)-2)}{(4+1)}$ $=\frac{10}{5}=2.$ Jadi, nilai $\lim_{x\to4}\frac{3x^2-14x+8}{x^2-3x-4}$ adalah 2 (B).	1
4	Nilai $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}$ adalah.... $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-2)\,.\,\sin(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}$ $=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-2)}{\tan(3x-6)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-2)}{\tan3(x-2)}=\frac{1}{3}$ Jadi, nilai $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}$ adalah $\frac{1}{3}$ (D).	1
5	Nilai dari $\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ adalah.... $\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-3)}{(x+4)}$ $=\frac{(2-3)}{(2+4)}=\frac{-1}{6}=$ Jadi, nilai $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)\tan(3x-6)}$ adalah $\frac{-1}{6}$ (E).	1
6	Nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin5x}{6x}$ adalah.... $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin5x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}+\frac{\sin5x}{6x}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}$ $=1$ Jadi, nilai $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin5x}{6x}$ adalah 1 (B).	1
7	Hasil dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$ adalah.... $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sqrt{1-x}+1)}{1-x-1}$ $=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x\,.\,\sqrt{1-x})+\sin x}{1-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x\,.\,\sqrt{1-x})}{-x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-x}$ $=-\sqrt{1-0}+(-1)=(-1)+(-1)=-2$ Jadi, nilai $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$ adalah -2 (E).	1
8	Nilai $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ adalah.... $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ $=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{1}{2}.\left[-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{1}{2}.\left[\cos\frac{\pi}{4}-\cos(-2x)\right]}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x}$ $=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{1}{2}.\cos2x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}$ $=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)}{\sqrt{2}}$ $=\frac{(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}=\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ Jadi, nilai $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ adalah 1 (B).	1
9	Nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-\sin3x\cos2x}{2x^3}$ adalah.... $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-\sin3x\cos2x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x(1-\cos2x)}{2x^3}$ $=\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos2x)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3.2\sin^2x}{2x^2}$ $=\lim_{x\to0}\frac{3.2\sin^2x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3}{1}=3$ Jadi, nilai dari $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-\sin3x\cos2x}{2x^3}$ adalah 3 (E).	1

10	Nilai dari $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{4-x}$ adalah…. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{4-x} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{4-x} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}$ $\lim_{x \to 4} \frac{2x+1-(x+5)}{(4-x)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{-1(4-x)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})}$ $\lim_{x \to 4} \frac{1}{-(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})} = \frac{1}{-(\sqrt{2(4)+1}+\sqrt{(4)+5})}$ $= \frac{1}{-(3+3)} = \frac{1}{-6}$ Jadi, nilai dari $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{4-x}$ adalah $\frac{1}{-6}$ (B).	1

Glosarium

Bentuk Sekawan — Dua bentuk akar di mana apabila keduanya dikalikan membentuk bilangan rasional

Bentuk Tak Tentu — Bentuk suatu limit yang nilainya tidak dapat ditentukan secara langsung

Faktor — Bentuk-bentuk lain yang terpisah dari bentuk secara keseluruhan suatu fungsi

Fungsi Aljabar — Fungsi yang memuat variabel sederhana

Fungsi Trigonometri — Fungsi yang memuat bentuk dan variabel trigonometri

Kurva — Grafik yang menggambarkan variabel yang terdiri dari persambungan titik-titik tertentu

Limit — Nilai pendekatan suatu fungsi

Limit Fungsi Trigonometri — Limit yang memuat fungsi dan variabel dalam bentuk trigonometri

Limit Tak Hingga — Limit yang nilainya menuju nilai tak hingga

Substitusi — Penggantian sesuatu dengan nilai yang diberikan

Scientific Calculator — Kalkulator yang didesain untuk perhitungan yang rumit berdasarkan kaidah algoritma yang benar

Tak Hingga — Nilai yang tak terkira besarnya

Teorema Apit — Suatu teorema yang berbunyi “Misalkan *f*, *g*, dan *h* adalah fungsi yang memenuhi *f(x)* ≤ *g(x)* ≤ *h(x)* untuk semua *x* yang mendekati a. Jika *limx→af(x)* = *limx→ah(x)* = *L*, maka *limx→a g(x)* = *L*.”

Trigonometri — Ilmu ukur mengenai sudut pada suatu segitiga

Variabel — Sesuatu yang nilainya dapat berubah yang bergantung pada pemberi nilai

Saran Referensi

Anonim. (2018). *Kumpulan Soal limit fungsi trigonometri.* Diakses dari https://idschool.net/sma/kumpulan-soal-limit-fungsi-trigonometri/

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* (Edisi) kelima. Alih bahasa Oleh: Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh. Bandung: Erlangga.

Daftar Pustaka

Albab, U. (2015). *Manfaat Limit dalam Kehidupan Sehari-hari.* Diakses dari: https://ululalbab31n.blogspot.com/2015/03/manfaat-limit-dalam-kehidupan-sehari.html pada tanggal 22 November 2018.

Harja, M. (2017). *E-Modul Matematika Peminatan Kelas XII*. Diakses dari http://mediaharja.blogspot.com/2017/08/e-modul-matematika-peminatan-kelas-xii.html pada tanggal 12 November 2018.

Anonim. (2018). *Teddy Dog Stuffed Animal Ill.* Diakses dari https://pixabay.com/photos/teddy-dog-stuffed-animal-ill-242885/ pada tanggal 24 Mei 2019.

Anonim. (2018). *Wedding Just Married The Groom*. Diakses dari https://pixabay.com/photos/wedding-just-married-the-groom-1034430/ pada tanggal 24 Mei 2019.

Kristanto, YD. (2015). *10 Soal dan Pembahasan Limit Fungsi Trigonometri*. Diakses dari https://yos3prens.wordpress.com/2015/02/12/10-soal-dan-pembahasan-limit-fungsi-trigonometri/ pada tanggal 24 Mei 2019.

Kanginan, M, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam.* Bandung: Yrama Widya.

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* (Edisi) kelima. Alih bahasa Oleh: Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh. Bandung: Erlangga.

Sembiring, S, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/ MA Kelas XII*. Bandung: Penerbit SEWU (Srikandi Empat Widya Utama).

Suwarno, M. (2017). *Limit Fungsi Trigonometri*. Diakses dari http://materimatematikalengkap.blogspot.com/2017/11/limit-fungsi-trigonometri.html.

Suwarno, M. (2017). *Limit Fungsi Trigonometri*. Diakses dari http://materimatematikalengkap.blogspot.com/2017/11/limit-tak-hingga-fungsi-aljabar.html.

Tasari, dkk. (2016). *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Klaten: Intan Pariwara.

Profil Penulis

Nama : **Hendra Lesmana, M.Pd.**
HP/ WA : 0878 6955 5390
Facebook : Hendra Lesmana
Email : hendralesmana1302@gmail.com
Alamat : Kab.OKU Timur, Sum-Sel
Bidang Keahlian : Matematika, Musik, Kimia, dan Komputer

Riwayat Pendidikan Tinggi :
1. S-1 Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011)
2. S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2011-2013)

Riwayat Pekerjaan :
1. Dosen di Sekolah Tinggi Ilmu Pertanian Belitang (2014-2018)
2. Tutor Tatap Muka di Universitas Terbuka (2014-2018)
3. Guru di SMK Negeri 1 Belitang Madang Raya (2018-2018)
4. Dosen di STKIP Muhammadiyah OKU Timur (2019-2019)

Penelitian 10 tahun terakhir:
1. Pembelajaran Matematika Berbasis Komputer pada Pokok Bahasan Trigonometri di Kelas X SMA Negeri 1 Belitang
2. Pengembangan Soal Non Rutin Berbasis Komputer untuk Melatih Penggunaan Kemampuan Matematika Siswa di Kelas VIII SMP Negeri 2 Belitang III

No photos available

Nama : **Uswatun Hasanah, S.Pd.**
HP/ WA : 0896 2720 8400
Alamat : Jln Tanjung Sari RT 29 RW VI No. 037 Kec. Kalidoni Kel Bukit Sangkal, Palembang
Alamat Instansi : Jln. Teuku Umar No. 8
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pendidikan Tinggi:
S-1 Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan :
Guru Tidak Tetap di PKBM Home Scholling Palembang

Nama : **Drs. G. Kundaru**
HP/ WA : 0812 6160 6600
Email : kundaruikip@gmail.com
Kantor : BP PAUD dan DIKMAS Sumsel.
Alamat Kantor: Jl. Naskah II No. 714 km 7 Sukarame Palembang, Sumsel Kode Pos 30153

Bidang Keahlian : Pendidikan Luar Sekolah
Riwayat Pendidikan Tinggi : S-1 Pendidikan Luar Sekolah, Ikip Jogjakarta (Angkatan 1979)
Riwayat Pekerjaan : Pamong Belajar Madya di BP PAUD dan DIKMAS Sumsel

CATATAN: